南京理工大学

2020 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空题(每题 5 分, 共 30 分):

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a_4 \end{vmatrix}=$________.

2. 设 3 是 n 阶矩阵 A 的特征值, 则________是伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 0 & c \\ 3 & d & 4 \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d$ 为常数), B 为三阶非零方阵且 $AB=0$, 则 A 的秩为________, $|B|=$________.

4. 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+\lambda x_3 &= 2 \\ 2x_1+\lambda x_2-x_3 &= 0 \\ x_1-3x_3 &= 1 \end{cases}$$
有唯一解. 则 λ 取何值________.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 的过渡矩阵为________.

6. 设 a 是实数, 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_2)^2+(x_2+ax_3)^2+(x_3+ax_1)^2$ 正定, 则 a 的取值范围是________.

二、(10 分) 设多项式 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $f(x)=(f(x),f'(x))g(x)$ (其中 $(f(x),f'(x))$ 表示 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式), 且 $g(x)$ 在复数域内只有两个根 $2,-5$, 又有 $g(1)=-18$, $f(0)=1500$, 求 $f(x)$.

三、(10 分) 设 A,B 是 n 阶矩阵且 $E+AB$ 可逆. 证明: $E+BA$ 也可逆, 且 $(E+BA)^{-1}+B(E+AB)^{-1}A=E$.

四、(10 分) 设 A 是实矩阵, 证明: $r(AA')=r(A)$.

五、(15 分) 设 A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: $r(A^2)=r(A)$ 的充要条件是 $AV\cap A^{-1}(0)=\{0\}$.

六、(15 分) 设 A 是实对称正定矩阵, 证明: 存在唯一的正定矩阵 B 使得 $A=B^2$.

七、(10 分) 设 $f(\alpha,\beta)$ 是数域 P 上线性空间 V 上的对称双线性函数. 如果 $f(\alpha,\beta)=g(\alpha)h(\beta)(\forall\alpha,\beta\in V)$, 其中 g,h 是 V 上的两个线性函数. 证明: 存在 V 上的线性函数 k 和非零常数 $\lambda\in P$, 使得 $f(\alpha,\beta)=\lambda k(\alpha)k(\beta)(\forall\alpha,\beta\in V)$.

八、(15 分) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基, f_1,f_2,f_3 是它的对偶基, 令
$$\xi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \xi_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \xi_3=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$
证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 V 的一组基, 并求它的对偶基.

九、(20 分) 设 3 阶矩阵 A 的各行元素和为 3, 向量 $\alpha=(1,-1,0)'$, $\beta=(0,1,-1)'$ 是方程组 $AX=0$ 的两个解.

(1) 求矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 $Q'AQ=\Lambda$.

十、(15 分) 设 A 是 n 阶实方阵, 满足
$$(A\alpha,\beta)=-(\alpha,A\beta),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$
证明:

(1) A^2 相似于对角矩阵;

(2) A 作为复矩阵的 n 个特征值必为 0 或纯虚数.